Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Cosmologia com python

Clécio Roque De Bom – debom@cbpf.br

clearnightsrthebest.com

Como analisar o Universo?

Reducionismo (contrário de holístico)

- Princípio Cosmológico:

“O princípio cosmológico geralmente é dito formalmente como 'Visto de uma escala suficientemente grande, as propriedades do Universo são as mesmas para todos os observadores.' Esta afirmação está fortemente relacionada à declaração filosófica que a parte do Universo que podemos ver é uma amostra representativa do mesmo, e que as mesmas leis físicas se aplicam em todos os lugares. Em essência, ela afirma de certa forma que o Universo pode ser conhecido e está jogando corretamente com os cientistas.”

- Final do século XX: as observações astronômicas mostram que o Universo é aproximadamente **homogêneo e isotrópico** em grandes escalas

- Abordagem perturbativa. Ordem 0: Universo homogêneo e isotrópico

Algumas consequências da expansão e da lei de Hubble

Em um Universo Homogêneo e isotrópico, a distância só pode aumentar ou diminuir

$$\mathbf{r} = \frac{R(t)}{R(t_1)}\mathbf{r}_1 \qquad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\mathbf{r}_1}{R(t_1)}\frac{dR(t)}{dt}$$

Pela Lei de Hubble

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1}{R(t_1)}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$H(t) = \frac{1}{R(t)}\frac{dR}{dt} = \frac{\dot{R}}{R}$$

Podemos definir o fator de escala normalizado a(t0)=1.

$$a(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)}$$

Densidade de matéria

Para dois observadores comoveis, que se movem junto com o hubble flow, a densidade não depende da posição

$$\rho(t_0) = 3M/4\pi r_0^3 \qquad \rho(t) = 3M/4\pi r^3$$

$$\rho(t) = \rho_0[r_0/r(t)]^3$$

$$\rho(t) = \rho_0 \; a(t)^{-3}$$

Houve um inicio?

Se a constante de hubble fosse constante e se não houvesse nenhuma interação relevante desacelerando ou acelerando as galáxias. Deveria existir um momento de contato:

$$t_0 = \frac{r}{v} = \frac{r}{H_0 r} = H_0^{-1}$$

Se:

$$H_0 = 70 \pm 7\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$$

Então:

$$H_0^{-1} = 14.0 \pm 1.4\,\mathrm{Gyr}.$$

No entanto, isso não demonstra um inicio, apenas sugere que pode ter existido um passado denso.

Paradoxo de Olbers e a lei de Hubble

Se a escala de tempo do Universo é dada por:

$$t_0 \sim H_0^{-1}$$

Isso define um horizonte para um fóton viajando

$$c/H_0 = 4300 \pm 400 \,\mathrm{Mpc}$$

Considerando os dados Observacionais do Universo local,
a densidade de luminosidade:

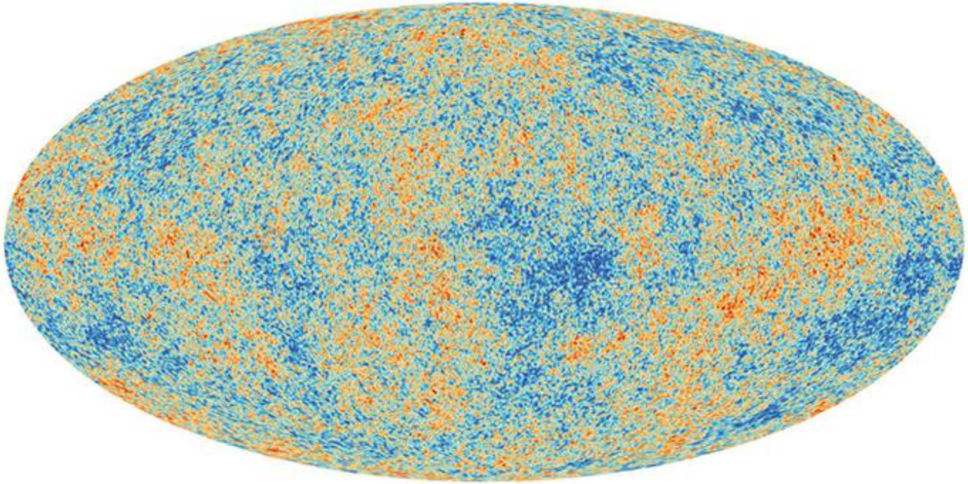
$$n_L \approx 2 \times 10^8 \,\mathrm{L}_\odot \,\mathrm{Mpc}^{-3}$$

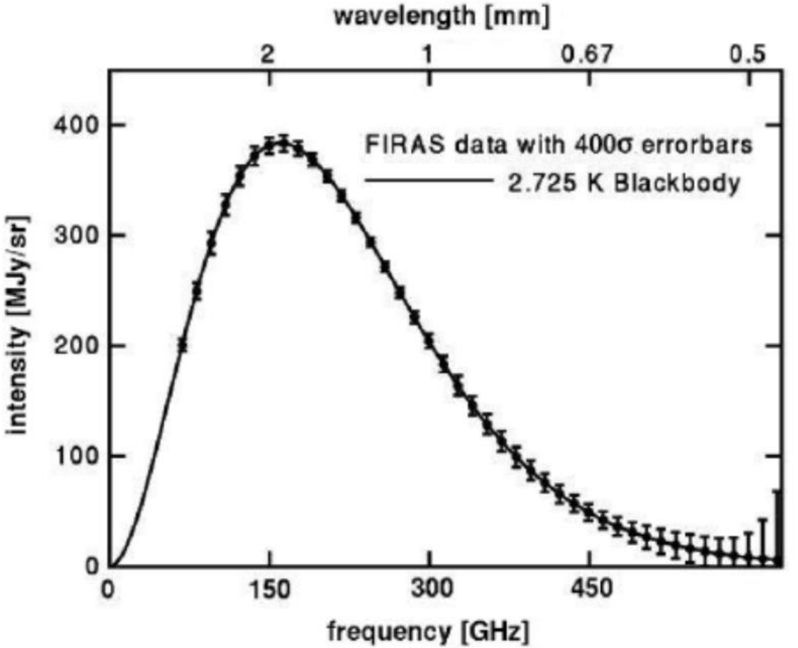
$$F_{\mathrm{gal}} = n_L \int_0^{r_H} dr \sim n_L \left(\frac{c}{H_0}\right)$$

$$\sim 2 \times 10^{-11} \,\mathrm{L}_\odot \,\mathrm{AU}^{-2}$$

$$F_{\mathrm{sun}} = \frac{1 \,\mathrm{L}_\odot}{4\pi \,\mathrm{AU}^2} \approx 0.08 \,\mathrm{L}_\odot \,\mathrm{AU}^{-2}$$

Existência da Radiação Cósmica de Fundo





CMB spectrum measured by COBE, the error bars are exaggerated by a factor of 400. (ref. [Bartelmann])

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4$$

$$\epsilon(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

$$\beta = 1/k_B T$$

A existência da CMB também sugere um Universo homêneo e Isotrópico.

Existência da Radiação Cósmica de Fundo

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4$$

Primeira Lei da termodinâmica

$$dQ = dE + PdV$$

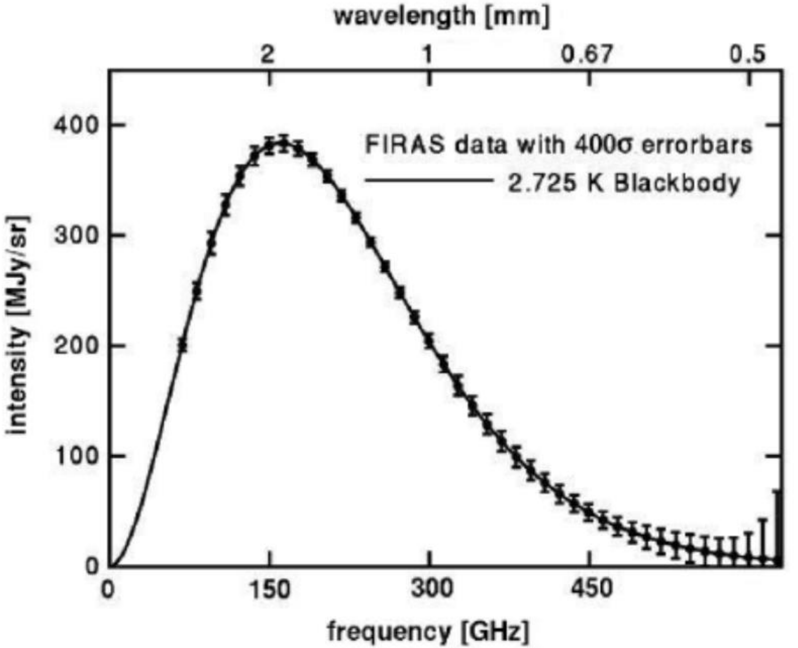
Equilíbrio Térmico....

$$\frac{dE}{dt} = -P(t)\frac{dV}{dt}$$

$$E = \alpha T^4 V$$

Assumindo um gás de fotóns ....

$$P_\gamma = \varepsilon_\gamma/3 \qquad P_\gamma = \alpha T^4/3,$$



CMB spectrum measured by COBE, the error bars are exaggerated by a factor of 400. (ref. [Bartelmann])

Existência da Radiação Cósmica de Fundo

$$\frac{dE}{dt} = -P(t)\frac{dV}{dt}$$

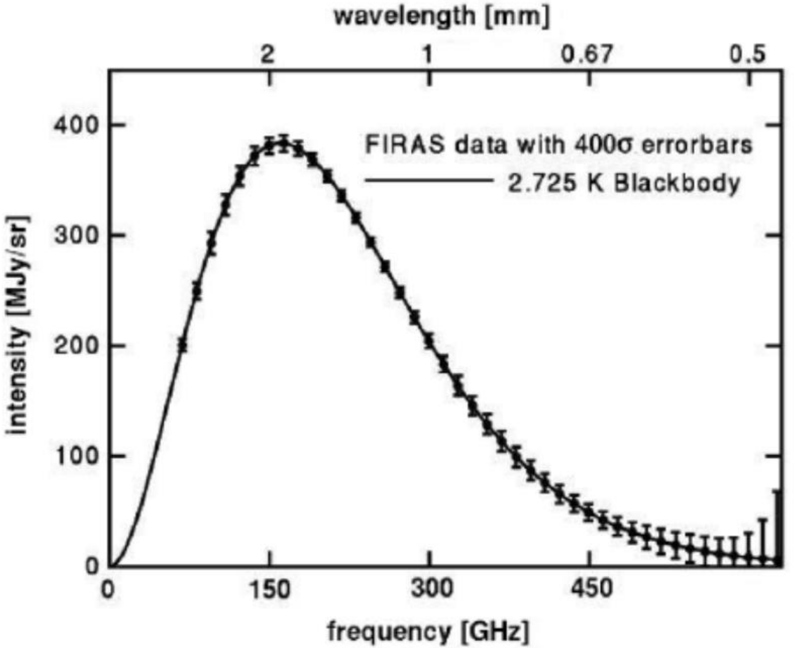
$$E = \alpha T^4 V$$

Assumindo um gás de fotóns .... (Razoável se o Universo era quente e denso)

$$P_\gamma = \varepsilon_\gamma/3 \qquad P_\gamma = \alpha T^4/3,$$

$$\alpha\left(4T^3\frac{dT}{dt}V + T^4\frac{dV}{dt}\right) = -\frac{1}{3}\alpha T^4\frac{dV}{dt}\ ,$$

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3V}\frac{dV}{dt} \qquad V \propto a(t)^3$$



CMB spectrum measured by COBE, the error bars are exaggerated by a factor of 400. (ref. [Bartelmann])

Densidade da radiação

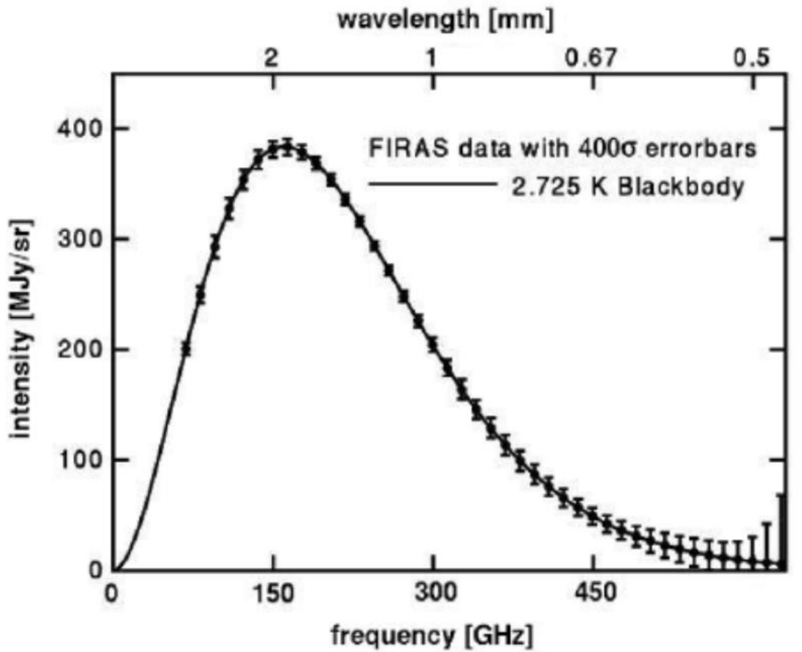
$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3V}\frac{dV}{dt} \qquad V \propto a(t)^3$$

$$\frac{d}{dt}(\ln T) = -\frac{d}{dt}(\ln a)$$

$$T(t) \propto a(t)^{-1}$$

$$\epsilon_r = \rho_r c^2 = \alpha T^4$$

$$\rho_r \sim \frac{1}{a^4}$$



CMB spectrum measured by COBE, the error bars are exaggerated by a factor of 400. (ref. [Bartelmann])

Breve Introdução a Cosmologia Newtoniana

Porque se importar? (Why bother?)

● A Mecânica newtoniana apresenta diversas dificuldades, conceituais e matemáticas que a impedem de ser uma descrição “satisfatória” do Universo.

● Por outro lado, ela é didática e intuitiva para maioria dos estudantes (em particular, aqueles não são familiarizados com o formalismo da RG). E é possível encontrar equações fundamentais para descrever o Universo homogêneo e isotrópico apesar dessas dificuldades insuperáveis na visão newtoniana.

● É importante entender porque a descrição newtoniana não é adequada e precisamos utilizar o arcabouço da Relatividade Geral.

Breve Introdução a Cosmologia Newtoniana

Considere um volume grande de matéria, e a partir do teorema de birkhoff, isto é, considerando que somente a massa no interior da casca esférica é responsável pelo campo gravitacional:

$$F = m\ddot{r} = -\frac{GmM(r)}{r^2} = -\frac{4\pi}{3}Gm\rho r$$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\ddot{r} = -\frac{4\pi G\rho r}{3}$$

$$r = \frac{R(t)}{R_0} r_0 = a(t) r_0$$

$$\ddot{r} = \ddot{a}(t) r_0$$

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a$$

Equação de Friedmann para um fluido sem pressão, matéria.

Breve Introdução a Cosmologia Newtoniana

Conservação da Energia

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = \text{constante}$$

$$M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t)a^2 - K$$

$$r = \frac{R(t)}{R_0} r_0 = a(t) r_0$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - K\frac{c^2}{a^2}$$

Definimos a densidade crítica:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3}$$

$$\frac{H^2 r^2}{2} = \frac{G}{r}\rho_0 \frac{4}{3}\pi r^3$$

EquaçÃo de Friedmann versão relativística

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 - \frac{\kappa c^2}{R_0^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) = -\frac{p}{c^2}\frac{d}{dt}(a^3)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

Equações de Estado

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

- matéria (“poeira”, $p = 0$): $\rho_m \propto a^{-3}$
- radiação ($p = \rho_r c^2/3$): $\rho_r \propto a^{-4}$
- vácuo: $p = -\rho_v c^2$, $\rho_v = \Lambda/(8\pi G)$
- modelo simples para energia escura: $p = w\rho c^2$, com w constante

Reparametrizando

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

$$\Omega = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)} \qquad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

$$\rho_{c,0} \equiv \varepsilon_{c,0}/c^2$$

$$\varepsilon_c(t) \equiv \frac{3c^2}{8\pi G}H(t)^2$$

Reparametrizando

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$H^2\left(1 - \frac{8\pi G}{3H^2}\rho\right) = -\frac{Kc^2}{a^2}$$

Reparametrizando

$$H^2\left(1-\frac{8\pi G}{3H^2}\rho\right)=-\frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\boxed{\rho_c(t)\equiv\frac{8\pi G}{3H^2},\quad \Omega_i(t)=\frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}}$$

$$H(t)\equiv\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$\boxed{H^2\left(1-\Omega(t)\right)=-\frac{Kc^2}{a^2}}$$

$$H_0^2(1-\Omega_0)=-\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

Reparametrizando

$$\boxed{\rho_c(t) \equiv \frac{8\pi G}{3H^2}, \quad \Omega_i(t) = \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}}$$

$$\boxed{H^2\left(1 - \Omega(t)\right) = -\frac{Kc^2}{a^2}}$$

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

$$H_0^2(1 - \Omega_0) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_m + \rho_r + \rho_X\right) - \frac{Kc^2}{a_0^2}\frac{a_0^2}{a^2}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_{m,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \rho_{r,0}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \rho_X\left(\frac{a_0}{a}\right)^{3(1+w_X)}\right) + H_0^2(1 - \Omega_0)\frac{a_0^2}{a^2}$$

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovações

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Cosmologia com python

Clécio Roque De Bom – debom@cbpf.br

clearnightsrthebest.com